



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -**

**CLASA A XII-A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.  
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

**1.** Pentru fiecare  $p \in \mathbb{N}^*$  considerăm mulțimea  $U_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$ .

a) Să se arate că există  $\omega \in U_p$  astfel încât  $U_p = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}\}$ .

b) Să se arate că, dacă  $m, n \in \mathbb{N}^*$  și mulțimea  $U_m \cup U_n$  este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor complexe, atunci  $m$  divide  $n$  sau  $n$  divide  $m$ .

**2.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și un subgrup  $H$  al lui  $G$ , cu  $H \neq G$ .

a) Să se arate că dacă  $x \in H$  și  $y \in G \setminus H$ , atunci  $xy \in G \setminus H$ .

b) Să se arate că dacă orice două elemente din  $G \setminus H$  comută, atunci grupul  $(G, \cdot)$  este comutativ.

**3.** Fie  $0 < a < b$  și  $f : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$  o funcție continuă.

a) Să se arate că pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  există și este unic numărul  $x_n \in (a, b)$  astfel încât

$$n \int_a^{x_n} f(x) dx = \int_{x_n}^b f(x) dx.$$

b) Dacă  $(x_n)_{n \geq 1}$  este șirul definit la a), să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**4. a)** Să se arate că  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3}$ , pentru orice  $x \geq 0$ .

b) Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  o funcție continuă. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \left( \frac{1}{n} f \left( \frac{k}{n} \right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$